МИННАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
теории функций и геометрии
Семёнов Е.М.

30.06.2020

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.06 Геометрические методы
нелинейного анализа

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Профиль подготовки/специализация: Современные методы теории функций в математике и механике

3. Квалификация (степень) выпускника: Специалист

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

0503 теории функций и геометрии

6. Составители программы: Мелешенко Петр Александрович, к. ф.-м. н., доцент

7. Утверждена НМС математического факультета, протокол от 18.06.2020, № 0500-04

---

8. Учебный год: 2022/2023 уч.год **Семестр(ы): 6**

9. Цели и задачи учебной дисциплины: Целью дисциплины является ознакомление студентов с основными теоремами, проблемами и методами нелинейного анализа. Нелинейный анализ тесно связан с анализом, линейной алгеброй и другими разделами математики, что является отражением внутреннего единства математики. Выявление этих взаимосвязей также является одной из целей дисциплины.
В результате изучения дисциплины студенты должны
(а) Знать
- основные задачи нелинейного анализа;
- основные геометрические понятия и факты, лежащие в основе теорем существования и приближенных методов решения уравнений;
- рассмотрение конкретных примеров.

(б) Уметь
- самостоятельно составлять машинные алгоритмы и программы решения операторных уравнений на основе известных методов и алгоритмов;
- модифицировать известные алгоритмы, реализовывать структуры данных, повышающие эффективность существующих;
- оценивать сложность алгоритмов на основе теоретических (нижних) оценок.

(в) Иметь представление о

- об оптимальных по сложности алгоритмах решения уравнений;
- математических методах анализа сложности геометрических задач и алгоритмов;
- об областях применения алгоритмов в прикладной математике.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: Курс «Геометрические методы нелинейного анализа» относится к циклу, формируемая участниками образовательных отношений части математического цикла дисциплин Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования (ФГОС 3++) по специальности 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика» (специалитет).

Для освоения дисциплины необходимы знания дисциплин: дискретная математика, алгебра. Освоение дисциплины позволит в дальнейшем изучать дисциплины: теория чисел, численные методы, а также специальные курсы по профилю подготовки.
Является продолжением общих математических курсов. Дисциплина необходима для успешного написания курсовых и дипломных работ.

Наиболее важные проблемы математики связаны с проблемой существования и вычисления решений операторных уравнений, которые возникают в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Эти проблемы рассматриваются в метрических пространствах. Одной из важных задач нелинейного анализа является доказательство теорем существования неподвижных точек нелинейных отображений и приложение полученных результатов к изучению конкретных задач. Эта проблема и является в этом курсе основной.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	знать: основные определения и результаты нелинейного анализа уметь: решать задачи по нелинейному анализу владеть (иметь навык(и)): основными методами нелинейного анализа и применять их для решения конкретных задач
ПК-2.1	Знает современные методы разработки и реализации моделей, используя теорию функций	знать: основные теоремы о неподвижных точках уметь: применять эти теоремы для доказательства существования решений конкретных задач
ПК-2.2	Умеет разрабатывать математические модели в области естествознания, экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов прикладных программ моделирования	Знать: основные понятия курса, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений;
ПК-2.3	Имеет практический опыт разработки математических моделей и их численной реализации, оценки адекватности модели и анализа результатов моделирования, обработки результатов моделирования	
ПК-3.1	Знает современные методы разработки и реализации математических моделей	

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.(*в соответствии с учебным планом)* **— 3**/108.

Форма промежуточной аттестации *(зачет/экзамен)* зачет

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	Всего	По семестрам		
		6 семестр	№ семестра	…
Аудиторные занятия	54	54		
в том числе: лекции	36	36		
практические	18	18		
лабораторные				
Самостоятельная работа	54	54		
Форма промежуточной аттестации *(зачет – 5 час. / экзамен – 0 час.)*				
Итого:	108	108		

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1. Лекции		
1	Метрические и нормированные пространства	Изучаются основные свойства пространств.
2	Принцип сжимающих отображений и его обобщения.	Доказываются теоремы о неподвижных точках.
3	Приложения принципа сжимающих отображений в дифференциальных уравнениях.	Даются приложения принципа сжимающих отображений к разрешимости интегральных и дифференциальных уравнений.
4	Теорема Каристи для однозначных отображений и следствия из неё..	Доказывается теорема Каристи и приводится ее приложение.
5	Многозначные отображения. Примеры. Теорема Каристи для многозначных отображений.	Доказывается теорема Каристи для многозначных отображений.
6	. Полунепрерывные сверху многозначные отображения. Связь с замкнутостью графика. Примеры...	Изучаются полунепрерывные сверху многозначные отображения.
7	Теорема Какутани.	Доказывается теорема.
8	Определение игры двух лиц с нулевой суммой. Матричные игры. Примеры.	Приводится определение игры 2-х лиц.
9	Точка равновесия игры. Основные леммы.	Доказываются основные леммы.
10	Основная теорема теории игр. .	Доказывается теорема.
11	Определения отображений	Дается определение отображений Кнастера-Куратовского-

	Кнастера-Куратовского-Мазуркевича (ККМ-отображений). Примеры.	Мазуркевича (ККМ-отображений) и приводятся примеры.
12	Теорема об основном свойстве ККМ-отображений.	Доказывается теорема.
13	Основная лемма о существовании точки минимума	Доказывается теорема о существовании точки минимума
14	Некоторые обобщения теоремы Шаудера	Рассматриваются обобщения теоремы Шаудера
	2. Практические занятия	
1	Метрические и нормированные пространства.	. Изучаются основные свойства пространств.
2	Принцип сжимающих отображений и его обобщения.	. Доказываются теоремы о неподвижных точках.
3	Приложения принципа сжимающих отображений в дифференциальных уравнениях	Даются приложения принципа сжимающих отображений к разрешимости интегральных и дифференциальных уравнений.
4	Теорема Каристи для однозначных отображений и следствия из неё..	Доказывается теорема Каристи.
5	Многозначные отображения. Примеры. Теорема Каристи для многозначных отображений	Доказывается теорема Каристи для многозначных отображений.
6	. Полунепрерывные сверху многозначные отображения. Связь с замкнутостью графика. Примеры...	Изучаются полунепрерывные сверху многозначные отображения.
7	Теорема Какутани.	Доказывается теорема.
8	Определение игры двух лиц с нулевой суммой. Матричные игры. Примеры.	Приводится определение игры 2-х лиц.
9	Точка равновесия игры. Основные леммы.	Доказываются основные леммы.
10	Основная теорема теории игр.	Доказывается теорема.
11	Определения отображений Кнастера-Куратовского-Мазуркевича (ККМ-отображений). Примеры.	Дается определение отображений Кнастера-Куратовского-Мазуркевича (ККМ-отображений) и приводятся примеры.
12	Теорема об основном свойстве ККМ-отображений.	Доказывается теорема.
13	Основная лемма о существовании точки минимума	Доказывается теорема о существовании точки минимума
14	Некоторые обобщения теоремы Шаудера	Рассматриваются обобщения теоремы Шаудера

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего

1.	Теорема Каристи для однозначных и многозначных отображений	12	6		15	33
2.	Теорема Какутани и теория игр 2-х лиц.	12	6		19	37
3.	Отображения Кнастера-Куратовского-Мазуркевича (ККМ-отображения)	12	6		20	38
	Итого:	36	18		40	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: работа с конспектами лекций.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины *(список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)*

а) основная литература:

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	*Колмогоров, Андрей Николаевич. Элементы теории функций и функционального анализа : [учебник] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова .— Изд. 7-е .— М. : Физматлит, 2004 .— 570 с. : ил.*
2.	*Гельман, Борис Данилович. Введение в нелинейный анализ. Часть 1: [Учебное пособие]/ Б.Д. Гельман. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. – 32 с.*
3.	*Гельман, Борис Данилович. Введение в нелинейный анализ. Часть 2: [Учебное пособие]/ Б.Д. Гельман. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. – 31 с.*

б) дополнительная литература:

№ п/п	*Источник*
4.	*Колмогоров, Андрей Николаевич. Элементы теории функций и функционального анализа : учебное пособие для студ. мат. спец. ун-тов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1968 .— 496 с. : ил.*
5.	*Гуревич, Александр Петрович. Сборник задач по функциональному анализу : для студентов механико-математических факультетов / А.П. Гуревич, Л.Б. Зеленко ; Сарат. гос. ун-т им. Н.Г. Чернышевского .— Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1987 .— 106, [1] с. : ил.*

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
	ЭБС «Лань» : http://e.lanbook.com
	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – (http // www.lib.vsu.ru/)
	Google, Yandex, Rambler

* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы *(учебно-методические рекомендации, пособия, задачники, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)*

№ п/п	Источник
1.	*Гуревич, Александр Петрович. Сборник задач по функциональному анализу : для студентов механико-математических факультетов / А.П. Гуревич, Л.Б. Зеленко ; Сарат. гос. ун-т им. Н.Г. Чернышевского .— Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1987 .— 106, [1] с. : ил.*

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

---

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: При изучении дисциплины используются активные и интерактивные формы проведения лекций и лабораторных занятий; учебные аудитории для проведения лекционных и лабораторных занятий; осуществляется контроль посещаемости и выполнения всех видов самостоятельной работы. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому занятию.

---

19. Фонд оценочных средств:

1. Принцип сжимающих отображений Банаха

Пусть (X,ρ) -- метрическое пространство, $f:D(f)\subset X\to X$ -- некоторое отображение.

Определение 1. Отображение f называется сжимающим, если существует такое число $k\in (0,1)$, что для любых $x,y\in D(f)$ справедливо неравенство
\begin{equation}
\rho (f(x),f(y))\leq k\rho (x,y).
\end{equation}
Сжимающие отображения удовлетворяют следующим свойствам.

Лемма 1. Если отображение f является сжимающим, то:\\
(1) $\rho (f^{m}(x),f^{m}(y))\leq k^{m}\rho (x,y)$ для любых $x,y\in X$, где $f^{m}=f\circ f\circ \cdots\circ f$ -- композиция m экземпляров отображения f.\\
(2) Для любых $x,y\in X$ справедливо следующее неравенство:
\begin{equation}
\rho(x,y)\leq \frac{1}{1-k}(\rho (x,f(x))+\rho (y,f(y)))
\end{equation}

Доказательство. (1) легко проверяется методом

математической индукции.\\
(2). Из неравенства треугольника вытекает следующее неравенство:
$$\rho (x,y)\leq \rho (x,f(x))+\rho (f(x),f(y))+\rho (y, f(y)).$$
Подставляя в это неравенство неравенство (1), получим:
$$\rho (x,y)\leq \rho (x,f(x))+k\rho (x,y)+\rho (y, f(y)).$$
Откуда и получается неравенство (1.2).

Теорема (Принцип сжимающих отображений). Пусть X -- полное метрическое пространство, $f:X\to X$ -- сжимающее отображение, тог\-да:\\
(i) f имеет единственную неподвижную точку x_{*};\\
(ii) для любой точки $x\in X$ последовательность $\{ f^{n}(x) \}$ сходится к x_{*};\\
(iii) справедливо неравенство:
$$\rho(f^{n}(x),x_{*})\leq\frac{k^{n}}{1-k}\rho (x,f(x)).$$

Доказательство. Единственность неподвижной точки очевидным образом вытекает из неравенства (2), докажем существование неподвижной точки.

Рассмотрим итерационную последовательность $\{ f^{n}(x) \}$ выходящую из точки x. Эта последовательность является фундаментальной, т.к.
$$\rho(f^{n}(x),f^{m}(x))\leq \frac{1}{1-k}(\rho (f^{n}(x),f^{n}(f(x)))+\rho (f^{m}(x),f^{m}(f(x))))\leq$$
$$ \leq\frac{k^{n}+k^{m}}{1-k}\rho (x,f(x)).$$

Если $k<1$, то при n и m достаточно больших $\rho(f^{n}(x),f^{m}(x))$ можно сделать сколь угодно малым. Следовательно, итерационная последовательность $\{ f^{n}\}$ сходится к некоторому приделу x_{*}. Тогда $$\rho (x_{*}, f(x_{*})\leq \rho (x_{*},x_{n})+\rho (f(x_{n-1}), f(x_{*}))\leq \rho (x_{*},x_{n})+k\rho (x_{n-1}, x_{*}).$$ Следовательно, $\rho (x_{*}, f(x_{*}))$ меньше любого положительного числа, т.е. $x_{*}= f(x_{*})$.

Если в доказанном неравенстве перейти к пределу при $m\to \infty$, то получим справедливость неравенства (iii). Теорема доказана.

2. Теорема Каристи.
Одним из абстрактных обобщений принципа сжимающих отображений является следующая теорема. Пусть X -- полное метрическое пространство, $f:X\to X$ -- непрерывное отображение.

{\bf 1.11. Теорема.} {\it Если существует ограниченная снизу числовая функция $\alpha:X\to \mathbb{R}$ и число $c>0$ такие, что для любой точки $x\in X$ справедливо неравенство
\begin{equation}
\alpha(f(x))+c\,\rho (x,f(x))\leq \alpha(x),
\end{equation}
то отображение f имеет неподвижную точку.}

{\bf Доказательство.} Пусть x_0 произвольная точка из пространства X. Рассмотрим итерационную последовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $y_0 =x_0$, а $y_n =f(y_{n-1})$. Докажем, что эта последовательность является сходящейся.

Обозначим $a_n =\alpha (y_n).$ Тогда в силу условий теоремы имеем следующие неравенства:
$$a_n +c\,\rho (y_{n-1},y_n)\leq a_{n-1}, \;\;\mbox{для любого}\;\; n=1,2,...\;.$$
То есть
\begin{equation}
a_{n-1}-a_n\geq c\,\rho (y_{n-1},y_n)\geq 0.
\end{equation}
Таким образом последовательность $\{ a_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно убывает и в силу условий теоремы ограничена снизу. Тогда она является сходящейся и, следовательно, фундаментальной.

Оценим теперь расстояние между точками y_n и y_{n+p}. Имеем:
$$\rho (y_n ,y_{n+p})\leq\sum\limits_{i=1}^{p}\rho (y_{n+i-1} ,y_{n+i})\leq\sum\limits_{i=1}^{p}\frac{a_{n+i-1}-a_{n+i}}{c}=\frac{a_n -a_{n+p}}{c}.$$
Теперь фундаментальность последовательности $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ вытекает из фундаментальности последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Так как пространство X полно, то существует точка y_*, которая является пределом последовательности $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Покажем, что y_* является неподвижной точкой отображения f. В силу непрерывности отображения f имеем:
$$y_{*}=\lim\limits_{n\to\infty}y_n = \lim\limits_{n\to\infty}f(y_{n-1})=f(\lim\limits_{n\to\infty}y_{n-1})=f(y_{*}).$$ Теорема доказана.

3. Лемма Кнастера-Куратовского-Мазуркевича
Пусть X выпуклое компактное подмножество нормированного пространства E, $C(X)$ -- множество непустых замкнутых подмножеств X,
$F:X\to C(X)$ -- некоторое многозначное
отображение.

{\bf 2.1. Определение.} {\it Будем говорить, что многозначное отображение F является KKM-отображением, если для любого конечного множества $A=\{x_1 ,x_2,...,x_n\}\subset X$
имеет место включение $$conv (A)\subset \bigcup\limits_{i=1}^{n}F(x_i).\eqno(2.1)$$}

{\bf 2.2. Лемма.} {\it Пусть многозначное отображение F является KKM-отображением, тогда
пересечение $\bigcap\limits_{x\in X}F(x)\not=\O$.}

{\bf Доказательство.} Покажем, что система множеств
$\{F(x)\}_{x\in X}$ является центрированной. Предположим
противное, т.е. существуют такие точки $\{ x_1 ,x_2 ,...,x_n \}\subset X,$ что $\bigcap\limits_{i=1}^{n}F(x_i)=\O .$
Обозначим $$K=conv \{ x_1 ,x_2 ,...,x_n \}$$ и

рассмотрим множества $U_i =X\setminus F(x_i)$. Очевидно, что эти множества являются
открытыми и образуют покрытие пространства X. Рассмотрим
разбиение единицы $\{ \varphi_i\}_{i=1}^{n}$, подчиненное этому
покрытию,
то есть набор функций $\{ \varphi_i\}_{i=1}^{n}$, который удовлетворяет
следующим условиям:\\
(1) функции $\varphi_i : X\to\mathbb{R}$ непрерывны на X;\\
(2) $\varphi_i (x)\in [0,1]$ для любого $i=1,2,...,n$ и любого $x\in X$;\\
(3) для любого $i=1,2,...,n$ замыкание множества $$N_i= \{x|x\in X, \varphi_i (x)\neq 0\}$$ принадлежит множеству U_i;\\
4) $\sum\limits_{i=1}^n \varphi_i(x)=1$ для любой точки $x\in X$.

Определим отображение $g:K\to K$ условием,
$g(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i (x) x_{i}.$ В силу теоремы
Брауэра это отображение имеет неподвижную точку $y_* \in K$.
Следовательно, $$y_* =\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_{i}(y_*)
x_{i}=\sum\limits_{j=1}^{k}\varphi_{i_j}(y_*) x_{i_j},$$ где
$\sum\limits_{j=1}^{k}\varphi_{i_j}(y_*)=1$ и $0<\varphi_{i_j}(y_*
)\leq 1$ для любого j. Тогда
$$y_* =g(y_*)\in\bigcup\limits_{j=1}^{k}F(x_{i_j}),$$ т.е. существует множество
$F(x_{i_{j_0}})\ni g(y_*)$. Следовательно, $\varphi_{i_{j_{0}}}(y_*
)=0$, а это противоречит выбору функций φ_{i_j}. Это
противоречие и доказывает
утверждение.

4. Теорема о существовании точки минимума.

Рассмотрим одно следствие из леммы 2.2. Пусть E и E_1 нормированные
пространства, X выпуклое компактное подмножество пространства E,
$\varphi:X\times E_1\to \mathbb{R}$ --
функция, удовлетворяющая
следующим условиям:\\
($\varphi 1$) функция φ непрерывна;\\
($\varphi 2$) функция φ является выпуклой по первому
аргументу, т.е. для любого $y\in E_1$, для любых $x_1 ,x_2 \in X$ и
$\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство:
$$\varphi (\lambda x_1 +(1-\lambda)x_2 ,y)\leq \lambda\varphi (x_1
,y)+(1-\lambda)\varphi (x_2 ,y).$$

{\bf 2.3. Теорема.} {\it Пусть $f:X\to E_1$ непрерывное отображение, тогда при
сделанных предположениях существует точка
$x_* \in X$ такая, что $$\varphi (x_* ,f(x_*
))= \min\limits_{x\in X}\varphi (x,f(x_*)).\eqno(2.2)$$}

{\bf Доказательство.} Рассмотрим многозначное отображение $F:X\to C(X)$,
определенное условием $$F(x)=\{ x'\in X\;|\; \varphi
(x',f(x'))\leq\varphi (x,f(x'))\}.$$ Очевидно, что $F(x)\not =\O$
для любого $x\in X$, так как точка $x\in F(x)$. Множество $F(x)$
замкнуто, поскольку функция φ и отображение f непрерывны.
Покажем, что F удовлетворяет условиям леммы 2.2, т.е. $$conv

(A)\subset \bigcup\limits_{i=1}^{n}F(x_i)$$ для любого конечного множества $A=\{x_1 ,x_2,...,x_n\}\subset X$.

Предположим противное, тогда существуют множество $$A=\{x_1 ,x_2,...,x_n\}\subset X$$ и точка $z=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i x_i \in co (A)$ такие, что $z\not \in\bigcup\limits_{i=1}^{n}F(x_n).$ Тогда для любого $i=1,2,...,n$ справедливы неравенства $\varphi (z,f(z))>\varphi (x_i ,f(z))$. Следовательно, $$\varphi (z,f(z))=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i \varphi (z,f(z))> \sum\limits_{i=1}^n\lambda_i \varphi (x_i ,f(z)).$$ Так как функция φ выпукла по первому аргументу, то $$\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i \varphi (x_i ,f(z))\geq \varphi \biggl(\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i x_i ,f(z)\biggr)=\varphi (z,f(z)).$$ Полученное противоречие и показывает, что отображение F удовлетворяет условиям леммы 2.2, т.е. $\bigcap\limits_{x\in X}F(x)\not=\O$.

Пусть $x_* \in \bigcap\limits_{x\in X}F(x)$, тогда для любой точки $x\in X$ справедливо неравенство $\varphi (x_*,f(x_*))\leq\varphi (x,f(x_*))$. Следовательно, $$\varphi (x_*,f(x_*))=\min\limits_{x\in X}\varphi (x,f(x_*)).$$ Теорема доказана.\\

5. Одно обобщение теоремы Шаудера

Пусть E и E_1 нормированные пространства, X выпуклый компакт в E, $A:E\to E_1$ непрерывный линейный оператор, $f:X\to E_1$ непрерывное отображение. Имеет место следующее утверждение.

{\bf 2.4. Теорема.} {\it Если множество $f(X)\subset A(X)$, то уравнение $f(x)=A(x)$ имеет решение в X.}

{\bf Доказательство.} Для доказательства рассмотрим функцию $\varphi (x,y)=||A(x)-y||$, где $x\in X$, а $y\in E_1$. Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет условиям $(\varphi 1)$ и $(\varphi 2)$. Тогда в силу теоремы 2.3 существует точка $x_*\in X$ такая, что $$||A(x_*)-f(x_*)||=\varphi (x_*,f(x_*))\leq\min\limits_{x\in X}\varphi (x,f(x_*))=\min\limits_{x\in X}||A(x)-f(x_*)||.$$ Так как $f(x_*)\in f(X)\subset A(X)$, то $\min\limits_{x\in X}||A(x)-f(x_*)||=0$. Следовательно, $f(x_*)=A(x_*)$. Теорема доказана.

19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
ПК-1.1		Принцип сжимающих отображений. Теорема Каристи.	Лабораторные задания.

			Контрольная работа.
ПК-2.1		Отображения Кнастера-Куратовского-Мазуркевича (ККМ-отображения)	Лабораторные задания. Контрольная работа.
ПК-2.2			
ПК-2.3			
Промежуточная аттестация			Зачет

* В графе «ФОС» в обязательном порядке перечисляются оценочные средства текущей и промежуточной аттестаций.

19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом;
2) умение связывать теорию с практикой;
3) умение иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований;
4) умение применять полученные знания на практике;
5) владение понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способность иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач в области…	*Повышенный уровень*	*Зачтено*
Обучающийся владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), допускает не значительные ошибки при ответе.	*Базовый уровень*	*Зачтено*
Обучающийся владеет частично теоретическими основами дисциплины, фрагментарно способен дать ответ .	*Пороговый уровень*	*Зачтено*
Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки,	–	*Не зачтено*

19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

19.3.2 Вопросы к зачету

1. Метрические и нормированные пространства.
2. Принцип сжимающих отображений Банаха и его приложения.
3. Теорема Каристи для однозначных и многозначных отображений.
4. Полунепрерывные сверху многозначные отображения. Связь с замкнутостью графика. Примеры.
5. Теорема Какутани.
6. Определение игры двух лиц с нулевой суммой. Матричные игры. Примеры.
7. Точка равновесия игры. Основные леммы.
8. Основная теорема теории игр.

9. Определения отображений Кнастера-Куратовского-Мазуркевича (ККМ-отображений). Примеры.
10. Теорема об основном свойстве ККМ-отображений.
11. Основная лемма о существовании точки минимума.
12. Обобщение теоремы Шаудера.

19.3.4 Тестовые задания

Тестовых заданий нет

19.3.4 Перечень заданий для контрольных работ

Контрольная работа №1 по теме «Принцип сжимающих отображений и его обобщения. »

19.3.5 Темы курсовых работ

Нет курсовых работ.

19.3.6 Темы рефератов

1. Локальный вариант теоремы Каристи для однозначных и многозначных отображений.
2. Оображения Кнастера-Куратовского-Мазуркевича

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести устный опрос.

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины в форме зачета.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и может завершать изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях даже формирование определенных компетенций.

На экзамене оценивается уровень освоения дисциплины и степень сформированности компетенций оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно».

Задания текущего контроля и проведение промежуточной аттестации должны быть направлены на оценивание уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности; степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и практически значимую информацию; приобретение умений профессионально значимых для профессиональной деятельности.